Andrzej Salwicki

CZEGO INFORMATYCY NAUCZYLI SIĘ OD ANDRZEJA GRZEGORCZYKA?

Abstract. The paper of Andrzej Grzegorczyk [1953] on the hierarchy of primitive recursive functions was published in 1953.[1] Till today it is one of the most frequently cited results of a Polish author in computer science literature; the number of citations is near a thousand. Moreover, the paper is cited by eminent computer scientists, e.g. [Cook, 1983; Hartmanis and Hopcroft, 1971; Meyer and Ritchie, 1967; Muchnick, 1976; Mehlhorn, 1974], quite often the laureates of prestigious prizes.
For sixty years Andrzej Grzegorczyk's works in the domain of logic have obtained many important results. These results has found applications (quite often surprising ones) in various domains of computer science [Maksimova, 2007; Ornaghi *et al.*, 2006; Görnemann, 1971; Cohn *et al.*, 1997; Wolte and Zakharyaschev, 2002; Rauszer and Sabalski, 1975].
In 2003 Andrzej Grzegorczyk found a new proof for Gödel's undecidability result. The proof constructed by Grzegorczyk omits arithmetization, which makes the proof of Gödel so difficult in understanding. His reasoning [Grzegorczyk, 2005] makes use of a much simpler notion of the discernibility of texts; the arithmetic of natural numbers has been replaced by a simpler theory of concatenation of texts.

1. Wprowadzenie

Andrzej Grzegorczyk sam nie uważa się za informatyka, por. bibliografię jego prac w [Krajewski and Woleński, 2008]. A jednak, jego prace i publikacje mają znaczenie

- dla matematycznych podstaw informatyki (dla badań) oraz
- dla wykształcenia wielu informatyków (dydaktyka).

Jego książki i monografie z monografią *Zarys logiki matematycznej* [1961] na czele, stanowią doskonałe wprowadzenie do teorii funkcji obliczalnych. Zostały przetłumaczone na kilka języków i wielu informatyków uczyło się z nich o funkcjach obliczalnych.

[1] The present text is a modified, Polish version of an earlier article [Salwicki, 2008]. The presentation of Grzegorczyk's hierarchy has been rewritten. New chapters 5 and 6 were added. The presentation of the result of Meyer and Ritchie [1967] was extended.

ISBN 978–83–7431–346–9 ISSN 0860-150X

Dwa wyniki Andrzeja Grzegorczyka spinają jego dorobek w dziedzinie podstaw matematyki i informatyki. Są to:

- Napisana w wieku 30 lat rozprawa habilitacyjna [Grzegorczyk, 1953] i
- opublikowana w wieku 80+ praca [Grzegorczyk, 2005] prezentująca oryginalny dowód twierdzenia o nierozstrzygalności.

Jego wyniki nauczyły nas czegoś istotnego o obliczalności i kilka pokoleń informatyków inspirowało się wynikami profesora Andrzeja Grzegorczyka. Grzegorczyk ma wyniki w innych działach podstaw matematyki: oprócz *hierarchii Grzegorczyka* można przeglądając literaturę napotkać:

- aksjomat Grzegorczyka w logice modalnej,
- logikę Grzegorczyka [Maksimova, 2007],
- indukcję Grzegorczyka [Cornaros, 1995],
- regułę Grzegorczyka [Ornaghi *et al.*, 2006],
- aksjomat Grzegorczyka w logice silniejszej niż logika intuicjonistyczna [Grzegorczyk, 1964b; 1964a; Görnemann, 1971; Rauszer and Sabalski, 1975; Gabbay, 1974; M., 1981].

Może zaskakiwać odnalezienie pracy [Ornaghi *et al.*, 2006] na temat języków obiektowych, w której autor stosuje regułę Grzegorczyka dla modelowania systemów informacyjnych.

Istnieje też praca [Bonner and Mecca, 2000], w której wyniki Grzegorczyka cytowane są w kontekście baz danych.

2. Hierarchia Grzegorczyka

W rozprawie habilitacyjnej Grzegorczyka opublikowanej w 1953 r. dopatrujemy się pionierskiego wyniku na temat złożoności obliczeniowej. Następne prace na ten temat pojawiły sie kilkanaście lat później, zobacz przeglądowa praca Hartmanisa i Hopcrofta [1971]. Dziś po 60 latach wynik Grzegorczyka jest wciąż cytowany i inspiruje wielu badaczy problemów w teoretycznej informatyce. Jest to jedna z najczęściej cytowanych prac polskiego autora w literaturze informatycznej. Co więcej cytowania te znajdują się w pracach autorów wybitnych, często laureatów nagród tak prestiżowych jak nagroda Turinga. Problemy sformułowane w tej pracy wciąż inspirują kolejne pokolenia badaczy. Ponadto, w wielu nowych gałęziach informatyki powstają prace odwołujące się do wyniku Grzegorczyka z 1953 r.

Jak objaśnić hierarchię Grzegorczyka? Mówiąc ogólnie hierarchia ta eksponuje strukturę klas złożoności w zbiorze funkcji pierwotnie rekurencyjnych $\mathcal{PR}$. Zbiór $\mathcal{PR}$ funkcji pierwotnie rekurencyjnych jest najmniejszym zbiorem zawierającym funkcję stałą 0, funkcję następnika $x + 1$, funkcje rzutowania i zamkniętą ze względu na podstawienia i rekursję prostą (por. Definicje 2.1, 2.2 poniżej).

Grzegorczyk wykazał, że w zbiorze tym istnieje hierarchia. Funkcje znajdujące się na niższym piętrze hierarchii nie rosną tak szybko jak funkcje z pięter wyższych.

Wynik pracy [Grzegorczyk, 1953] może być streszczony następująco: Istnieje pewien rosnący ciąg zbiorów funkcji pierwotnie rekurencyjnych

$$\mathcal{E}^0 \subsetneq \mathcal{E}^1 \subsetneq \mathcal{E}^2 \subsetneq \mathcal{E}^3 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{E}^n \ldots$$

taki, że

$$\bigcup_{n \in N} \mathcal{E}^n = \mathcal{PR}.$$

Każdy zbiór $\mathcal{E}^n$ jest domknięty ze względu na podstawienia i ograniczoną rekursję prostą. Jego funkcje początkowe są funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi.

Podczas przedstawienia szkicu dowodu posłużymy się pracami przeglądowymi [Rose, 1984; Gakwaya, 1997] oraz notatkami do wykładu Kevina Kelly [2012].

Definicja 1

Zbiór podstawowych funkcji obliczalnych jest zbiorem

$$B = \{Z, S\} \cup \{p_i^n :\ 1 \leq i\ \leq n,\ n \in N\},$$

gdzie

$Z : N \to N$, funkcja stała *zero*,
$S : N \to N$, funkcja następnika,
dla każdego $n \in N$ i dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$
$p_i^n : N^n \to N$, funkcja rzutowania $p_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. □

Będziemy rozważać różne zbiory funkcji domknięte ze względu na dwie operacje *superpozycji* oraz *ograniczonej rekursji prostej*.

Definicja 2

Superpozycja $\mathcal{S}$. Niech $h_1, \ldots, h_n$ będą funkcjami r argumentowymi ($r \geq 1,\ n \geq 0$) a g niech będzie funkcją n argumentową. Powiadamy, że funkcja f jest otrzymana przez superpozycję funkcji g i funkcji $h_1, \ldots, h_n$ jeżeli dla dowolnych argumentów $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_r))$ zachodzi następująca równość

$$f(\overline{x}) = g(h_1(\overline{x}), \ldots, h_n(\overline{x}).$$

Rekursja Prosta $\mathcal{RP}$. Niech g będzie funkcją r argumentową i niech h będzie funkcją o $r+2$ argumentach. Jeśli dla dowolnych argumentów $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_r))$ zachodzi

$$\begin{cases} f(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}) \\ f(\overline{x}, t+1) = h(\overline{x}, t, f(\overline{x}, t)) \end{cases}$$

to mówimy, że funkcja f została otrzymana z funkcji g oraz h przez zastosowanie schematu rekursji prostej.

Ograniczona Rekursja Prosta $\mathcal{ORP}$. Rozważmy trójkę funkcji $\langle g, h, j\rangle$, gdzie g i h mają własności wymienione powyżej, a funkcja j ma $r+1$ argumentów. Funkcja f jest wynikiem ograniczonej rekursji prostej gdy została uzyskana z funkcji g i h przez rekursje prostą i gdy jest ograniczona przez funkcję j, tzn. $f(\overline{x}, t) \leq j(\overline{x}, t)$. □

Każda funkcja pierwotnie rekurencyjna jest określona jako wynik stosowania skończoną liczbę razy operacji superpozycji oraz rekursji prostej do funkcji bazowych. Wydawać by się mogło, że hierarchię stworzą piętra – zbiory funkcji definiowane przez coraz większą liczbę zastosowań schematu rekursji prostej. Tak jednak nie jest.

Do określenia hierarchii podzbiorów zbioru funkcji pierwotnie rekurencyjnych potrzebne są:

a) „kręgosłup” na którym zbudujemy hierarchię tj. ciąg funkcji E_i o coraz większej złożoności (w tym przypadku funkcji coraz szybciej rosnących) oraz,
b) wyrzeczenie się rekursji prostej i stosowanie wyłącznie ograniczonej rekursji prostej.

W naszym przypadku określimy następujący ciąg funkcji:

$$\begin{aligned} E_1(t) &\stackrel{df}{=} t^2 + 2, \\ E_n(t) &\stackrel{df}{=} E^t_{n-1}(2) \qquad\qquad \text{dla wszystkich } n \geq 2. \end{aligned}$$

Można sprawdzić, że taki ciąg funkcji spełnia warunki (i) oraz (ii) wymienione powyżej.

Zauważmy następujące własności funkcji E_n.

Lemat 3

Dla każdego n, i dla każdego t zachodzą następujące nierówności:

$$\begin{aligned} t+1 &\leq E_n(t), \\ E_n(t) &\leq E_{n+1}(t), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_n(t) &\leq E_n(t+1), \\
(\forall m)\ E_n^m(t) &\leq E_{n+1}(t+m). \qquad \Box
\end{aligned}
$$

W dalszym ciągu potrzebować będziemy jeszcze dodawania

$$E_0(t_1, t_2) \stackrel{df}{=} t_1 + t_2.$$

Teraz określimy klasy Grzegorczyka $\mathcal{E}^n$.

Definicja 4

Zbiory $\mathcal{E}^n$ są zdefiniowane następująco:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^0 &\stackrel{df}{=} \langle B; \mathcal{S}, \mathcal{ORP} \rangle, \\
\mathcal{E}^{n+1} &\stackrel{df}{=} \langle B \cup \{E_0\} \cup \{E_n\}; \mathcal{S}, \mathcal{ORP} \rangle, \quad \text{dla każdego } n.
\end{aligned}
$$

Na mocy definicji każdy zbiór $\mathcal{E}^n$ jest domknięty ze względu na operacje superpozycji $\mathcal{S}$ i ograniczonej rekursji prostej $\mathcal{ORP}$. Dla każdego zbioru $\mathcal{E}^{n+1}$ jego funkcje bazowe $\{B \cup \{E_0\} \cup \{E_n\}\}$ są funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi. $\Box$

Posługując się poprzednim lematem można dowieść:

Lemat 5 (Lemat wzrostu)

Niech $\bar{t} = (t_1, \dots t_n)$ oznacza krotkę argumentów.

- Funkcje ze zbioru $\mathcal{E}^0$ są ograniczone przez funkcję $t_i + c_f$:
  $(\forall f \in \mathcal{E}^0)(\exists i, c_f \in N)(\forall \bar{t})\ f(\bar{t}) \leq t_i + c_f$,
- Funkcje ze zbioru $\mathcal{E}^1$ są ograniczone przez funkcje liniowe:
  $(\forall f \in \mathcal{E}^1)(\exists c_0, c_1, \dots, c_n \in N)(\forall \bar{t}) f(\bar{t}) \leq c_0 + c_1 \cdot t_1 + \ \cdots \ + c_n \cdot t_n$,
- Dla $n \geq 2$, każda funkcja f ze zbioru $\mathcal{E}^n$ jest ograniczona przez odpowiednią iterację funkcji wzrostu E_n:
  $(\forall n \geq 2)(\forall f \in \mathcal{E}^n)(\exists m_f)(\forall \bar{t})\ f(\bar{t}) \leq E_{n-1}^{m_f}(max(\bar{t}))$. $\Box$

Stosując argument przekątniowy można wykazać, że $\mathcal{E}^n \neq \mathcal{E}^m$, dla $n \neq m$. Dowód wykorzystuje fakt, że każda klasa $\mathcal{E}^n$ zawiera funkcję, której funkcja wzrostu rośnie wraz z indeksem n. W ten sposób otrzymuje się fundamentalny wynik:

Twierdzenie 6

Istnieje ściśle rosnący ciag zbiorów funkcji pierwotnie rekurencyjnych

$$\mathcal{E}^0 \subsetneq \mathcal{E}^1 \subsetneq \mathcal{E}^2 \subsetneq \mathcal{E}^3 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{E}^n \ldots$$

taki, że

$$\bigcup_{n \in N} \mathcal{E}^n = \mathcal{PR}.$$

□

Uwaga. Do określenia „kręgosłupa” można użyć dowolnej funkcji G o następujących własnościach:

$$G(0) \geq 2 \wedge (\forall t \in N)\ t < G(t) < G(t+1).$$

Wtedy klasy hierarchii Grzegorczyka mogą być zdefiniowane przy pomocy ciągu funkcji $\{G_i\}$, który spełnia następujące warunki:

(i) $G_1(t) = G(t)$,

(ii) $G_n(t) = G^t_{n-1}(2)$. □

Powyższy wynik znacznie wyprzedził prace na temat złożoności obliczeniowej, por. Cook [1983].

Podczas gdy argument dotyczący wzrostu funkcji doprowadził do twierdzenia 6, to nie jest oczywiste, czy klasy $\mathcal{E}^i$ definiują różne klasy zbiorów liczb naturalnych. Powiadamy, że zbiór liczb naturalnych należy do klasy $\mathcal{E}^*_i$, gdy jego funkcja charakterystyczna należy do zbioru $\mathcal{E}^i$. Udowodniono, ze dla $i \geq 2$ jest to dokładna hierarchia klas $\mathcal{E}^*_i$ [Grzegorczyk, 1953]. Następujący problem: czy poniższe zawierania są ścisłe

$$\mathcal{E}^*_0 \subsetneq \mathcal{E}^*_1 \subsetneq \mathcal{E}^*_2?$$

pozostaje. od ponad 50 lat, jednym z trudniejszych wyzwań w teorii funkcji rekurencyjnych. Uzyskano tylko częściowy postęp w rozwiązaniu tego problemu: Bel'tyukov [1982] wykazał, że $\mathcal{E}^*_1 \subsetneq \mathcal{E}^*_2$ implikuje $\mathcal{E}^*_0 \subsetneq \mathcal{E}^*_1$. Kutyłowski [1987b] udowodnił, że jeśli w definicji klas zastąpić ograniczoną rekursję prostą przez ograniczoną iterację to prowadzi to równości dwu pierwszych klas tj. $I^0_* = I^1_*$. Ponadto wykazał, że podwójna rekursja może być użyta do określenia hierarchii pomiędzy piętrami $\mathcal{E}^*_0$ i $\mathcal{E}^*_2$. Dalsze rezultaty tego rodzaju można znaleźć w pracy [Kutyłowski and Loryś, 1987].

3. Wyniki powiązane z hierarchią Grzegorczyka

W tym rozdziale przytaczamy garść wyników odnoszących się do hierarchii Grzegorczyka.

3.1. Złożoność programów

Informatycy dobrze znają i doceniają twierdzenie 6. Znaczenie tego wyniku staje się bardziej widoczne w świetle prac R. W. Ritchie [1963], A. Meyera [1965] oraz Meyera i Ritchie [1967]. Jednym z pytań motywujących A. Meyera i R. W. Ritchie [1967] było pytanie następujące: *czy można spojrzeć na program i oszacować ograniczenie górne jego czasu wykonania*? Nie ma sposobu (algorytmu) gwarantującego dobrą odpowiedź. Tym niemniej dla pewnej klasy programów $\mathcal{LOOP}$ można taki przepis podać.

Niech $\mathcal{V}$ będzie zbiorem zmiennych. Zmienne będziemy oznaczać literami X, Y, Klasa $\mathcal{LOOP}$ programów jest najmniejszym zbiorem napisów takim, że

1. napisy postaci $X := 0$, $X := X + 1$, i $X := Y$ należą do zbioru $\mathcal{LOOP}$,
2. jeśli napisy P, P' należą do zbioru $\mathcal{LOOP}$ to do tego zbioru należy też napis $P; P'$,
3. jeśli napis P należy do zbioru $\mathcal{LOOP}$ to do tego zbioru należy też napis postaci **repeat** X **times** P **end**.

Dla danego programu P i wartościowania v zmiennych, obliczeniem c nazywamy taki ciąg par $\{\langle v_i, P_i\rangle\}$, że $v_0 = v$, $P_0 = P$, i

$$\langle v_{i+1}, P_{i+1}\rangle = \begin{cases} \langle v', P'\rangle & \text{gdy } P_i = X := 0; P' \text{ i } v'(X) = 0 \\ & \quad \text{i } v'(z) = v_i(z) \text{ dla } z \neq X \\ \langle v', P'\rangle & \text{gdy } P_i = X := X + 1; P' \text{ i } v'(X) = v_i(x) + 1 \\ & \quad \text{i } v'(z) = v_i(z) \text{ dla } z \neq X \\ \langle v', P'\rangle & \text{gdy } P_i = X := Y; P' \text{ i } v'(X) = v_i(y) \\ & \quad \text{i } v'(z) = v_i(z) \text{ dla } z \neq X \\ \langle v_i, R\rangle & \text{gdy } P_i = \textbf{repeat } X \textbf{ times } Q \textbf{ end}; P' \\ & \quad \text{i } R = \underbrace{Q; \ldots; Q}_{v_i(X)\text{razy}}; P' \end{cases}$$

Para $\langle v_{i+1}, \emptyset\rangle$ jest ostatnim elementem takiego ciągu.

Fakt 7

Każde obliczenie jest skończone.

Dla czytelników książek Grzegorczyka [1961] nie jest zaskoczeniem następujące

Twierdzenie 8

Każda funkcja pierwotnie rekurencyjna jest obliczana przez pewien program $P \in \mathcal{LOOP}$. □

W dalszym ciągu autorzy wprowadzają zbiory:

- L_n – zbiór programów w których konstrukcja **powtarzaj** jest zagnieżdżona co najwyżej n razy,
- $\mathcal{L}_n$ – zbiór funkcji obliczanych przez program ze zbioru L_n.

i dowodzą, że

Twierdzenie 9

Ciąg zbiorów $\mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \ldots$ jest ściśle rosnący, tzn. stanowi hierarchię w zbiorze funkcji pierwotnie rekurencyjnych. □

Jest to więc inna hierarchia, niż hierarchia Grzegorczyka. Łatwo zaobserwować, że operacja **powtarzaj** jest blisko spokrewniona z operacją minimum ograniczonego. Zobacz także rozdział na temat hierarchii Grzegorczyka w książce Brainerda i Landwebera [1974].

Uzyskano w ten sposób pewną odpowiedź na pytanie o koszt czasowy programu z klasy $\mathcal{LOOP}$. Koszt ten jest ograniczony przez liczbę zagnieżdżonych operacji powtarzaj. Ograniczenie takie nie jest jednak precyzyjne. Łatwo wskazać programy o sporej liczbie zagnieżdżeń operacji powtarzaj, których czas wykonania jest mały lub wręcz stały. Niestety, nie istnieje metoda znajdująca najmniejsze ograniczenie górne czasu wykonania danego programu [Meyer and Ritchie, 1967].

Warto też wymienić wyniki M. Kutyłowskiego [1987a]. Autor przypomina pojęcie uogólnionej hierarchii Grzegorczyka i omawia pewne problemy wiążące się z klasami początkowymi w tej hierarchii. Ustala równości pomiędzy uogólnionymi klasami Grzegorczyka i pewnymi klasami złożoności maszyn Turinga np. P oraz P*LINSPACE. Stosując narzędzia hierarchii Grzegorczyka udowadnia twierdzenie o hierarchii dla klasy P*LINSPACE. Dla lepszego opisu niższych klas złożoności wprowadza stosowe maszyny Turinga.

S. Breidbart [1979] udowodnił taką ciekawostkę o języku programowania APL: zbiór odpowiednio ograniczonych programów w jezyku APL (tradycyjnych 1-linerów) oblicza dokładnie zbiór funkcji z klasy E_4. hierarchii Grzegorczyka (jest to klasa bezpośrednio zawierająca klasę E_3 funkcji elementarnie rekurencyjnych).

3.2. Prezentacje hierarchii Grzegorczyka

Poza książką Brainerda i Landwebera [1974] wykład hierarchii Grzegorczyka można znaleźć w: Rose [1984], K. Wagner i G. Wechsung [2001], Gakwaya [1997], i w znanej monografii Rogersa [1987]. Warto zapoznać się z notatkami K. Kelly [Kelly, 2012] dla studentów.

3.3. Zastosowania hierarchii Grzegorczyka

Shelah [1988] wykorzystuje hierarchię Grzegorczyka by uzyskać lepsze oszacowanie kosztu obliczania liczb van Waerdena. Grozea [2004][2] odkrył, że znane problemy NP zupełne np. SAT lub problem cykli Hamiltona znajdują się w bardzo niskiej klasie $\mathcal{E}^{*0}$.

3.4. Artykuły i książki na temat teorii rekursji

Spośród długiej listy prac i książek w których wspomina się lub objaśnia hierarchię Grzegorczyka wspomnijmy kilka pozycji: Schwichtenberg [1997], Wainer [1972], Axt [1963], Muchnick [1976], Cichon & Wainer [1983], Bellantoni [2000], Mehlhorn [1974].

3.5. Rozszerzenia hierarchii Grzegorczyka

Istnieje kilka prac wprowadzających różne rozszerzenia hierarchii Grzegorczyka. Muchnick [1976] studiuje wektorowe hierarchie Grzegorczyka. Zobacz także: Wainer i Cichon [1972], [1983], Weiermann [1995]. Kristiansen and Barra [2005] definiują tzw. małe klasy Grzegorczyka dla rachunku lambda z typami.

3.6. Obliczenia analogowe i obliczenia z liczbami rzeczywistymi

Wielu autorów podejmowało próby przeniesienia hierarchii Grzegorczyka do modelu obliczeń analogowych lub do obliczeń z liczbami rzeczywistymi. Pionierską pracą w tej dziedzinie była praca Grzegorczyka [1957]. W pracy [Bournez and Hainry, 2004] zaprezentowano analogiczną i niezależną od komputera algebraiczną charakteryzację funkcji elementarnie obliczalnych w dziedzinie liczb rzeczywistych. Udowodniono, że jest to najmniejsza klasa funkcji, która zawiera pewne funkcje bazowe i jest zamknięta ze względu na operacje: złożenia, liniowego całkowania i schemat prostych granic. Wynik ten uogólniono na wszystkie wyższe poziomy hierarchii Grzegorczyka. Mycka i da Costa [Mycka and Costa, 2006] udowodnili nierozstrzygalność obliczeń

[2] Wynik ten dotyczy równoległej hierarchii klas $\mathcal{E}^{*n}$ zbiorów relacji arytmetycznych, których funkcje charakterystyczne należą do odpowiednich klas $\mathcal{E}^n$ hierarchii Grzegorczyka.

nad czasem ciągłym. Zobacz też prace [Campagnolo *et al.*, 2002; Downey and Hirschfeldt, 2008].

4. O innych logicznych wynikach Grzegorczyka

Informatyka, w wielu swoich badaniach posiłkuje się logika modalną lub jej odmianami. Wyniki badań Grzegorczyka w dziedzinie logik modalnych i logiki intuicjonistycznej zostały obszernie przedstawione w pracy Maksimova [2007].

4.1. Reguła Grzegorczyka

W pracy na temat języka programowania obiektowego dla modelowania systemów informacyjnych [Ornaghi *et al.*, 2006] znajdujemy zastosowanie następującej reguły Grzegorczyka.

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, [\ G(p)] \\ \vdots\ \pi \\ \textsc{or}\{C(p)\ B\}\end{array}}{\textsc{or}\{\ \textsc{for}\{\tau x \mid\ \ G(x) : C(x)\ \}B\}}$$

Nie wiem jakie są początki tej reguły. Prawdopodobnie należy ich szukać w pracach [Grzegorczyk, 1964b; 1964a]. Grzegorczyk rozważa w nich pewną logikę pośrednią, która powstaje przez dodanie następującej formuły

$$\forall x(P \vee Q(x)) \Rightarrow (P \vee \forall x Q(x))$$

do aksjomatów Heytinga logiki intuicjonistycznej. S. Görnemann [1971] nazywa tę formułę aksjomatem Grzegorczyka i dowodzi, że sformalizowana wg Heytinga logika intuicjonistyczna wzmocniona tym aksjomatem pozwala scharakteryzować klasę wszystkich struktur Kripkego o ustalonych dziedzinach. Nazwa ta następnie przyjęła. Zobacz też interesującą pracę Rauszer i Sabalskiego [1975].

4.2. Wyniki Grzegorczyka zastosowane w geoinformatyce

W r. 1951 Grzegorczyk opublikował wynik [Grzegorczyk, 1951] o nierozstrzygalności pewnych teorii topologicznych. Niedawno wynik ten był cytowany w dwu pracach:

- pracy na temat geoinformatyki [Cohn *et al.*, 1997] i
- w pewnej pracy nt. reprezentacji wiedzy (ang. Knowledge Representation) i jej jakościowej prezentacji przestrzenno-czasowej [Wolter and Zakharyaschev, 2002].

5. Nierozstrzygalność bez arytmetyzacji

Parę lat temu Andrzej Grzegorczyk podjął się ambitnego zadania: *udowodnić twierdzenie Gödla o nierozstrzygalności nie wykorzystując przy tym arytmetyzacji badanych teorii.* Artykuł [Grzegorczyk, 2005] jest dość długi – liczy prawie 70 stron, jest wynikiem cierpliwych i starannych prac. Zamiast oprzeć, jak u Gödla, dowód na arytmetyce liczb naturalnych z dodawaniem i mnożeniem, Grzegorczyk wykorzystuje teorię konkatenacji tekstów (inaczej słów), [tablica 1] z jednym działaniem – dopisywania tekstu. Rozpatrywane teksty zawierają tylko dwa znaki. (można je uznać za bity: *zero* i *jeden* – chociaż w pracy przyjęto inne oznaczenia). Trudno o prostszą sytuację.

Tablica 1. Elementarna teoria konkatenacji

Sygnatura teorii

Zbiór U tekstów (*można też mówić zbiór słów*)
Działanie
$*: U \times U \to U$ – *operacja konkatenacji*
oraz dwie stałe 0 oraz 1, $0, 1 \in U$

Aksjomaty

$$x * (y * z) = (x * y) * z \tag{A1}$$

$$x * y = z * u \to \tag{A2}$$

$$((x = z \wedge y = u) \vee (\exists w)((x * w = z \wedge w * u = y) \vee (z * w = x \wedge w * y = u)))$$

$$\neg(0 = x * y) \tag{A3}$$

$$\neg(1 = x * y) \tag{A4}$$

$$\neg(0 = 1) \tag{A5}$$

Okazuje się, że podejście takie znacznie ułatwi śledzenie dowodu nierozstrzygalności teorii konkatenacji. Napotykamy jednak pewną trudność. Na czym polega obliczalność w takiej teorii? Autor proponuje zastąpić relację obliczalności przez relacje elementarnej i ogólnej odróżnialności tekstów. Indukcyjna definicja elementarnej odróżnialności **ED** brzmi całkiem naturalnie, zobacz [tablicę 2]. Do klasy **ED** należą relacja identyczności, trójargumentowa relacja *tekst z jest wynikiem dopisania tekstu y za tekstem x*, oraz teksty atomowe 0 i 1. Klasa **ED** jest domknięta ze względu na operacje: dodawanie nowego argumentu (*bez ograniczeń na jego wartość*), identyfikowanie pierwszego i drugiego argumentu, zamiana miejscami sąsiednich argumentów, alternatywa i negacja, kwantyfikacja ograniczona do podsłów.

Po czym następuje definicja ogólnej odróżnialności **GD**, zobacz [tablicę 3]. Klasa relacji ogólnie odróżnialnych jest domknięta ze względu na operację dualnej kwantyfikacji.

W definicji operatora dualnej kwantyfikacji w pomysłowy sposób wykorzystano twierdzenie Posta i zaprzęgnięto je do pracy.

Przy tak skromnym aparacie Grzegorczyk dowodzi kluczowe twierdzenie o reprezentowalności.

Tablica 2. Elementarna odróżnialność ED

WARUNKI POCZĄTKOWE: do klasy relacji elementarnie odróżnialnych należą

1. $\{t : t = 0\} \in \mathbf{ED}$
   $\{t : t = 1\} \in \mathbf{ED}$
2. $\{\langle t, y\rangle : t = y\} \in \mathbf{ED}$
3. $\{\langle t, y, z\rangle : t = y * z\} \in \mathbf{ED}$

DEFINICJA INDUKCYJNA: klasa **ED** jest domknięta ze względu na następujące operacje logiczne:

a. Jeśli $R \in \mathbf{ED}$ to $\{\langle y, t_1, \dots, t_n\rangle : R(t_1, \dots, t_n)\} \in \mathbf{ED}$,
b. Jeśli $R \in \mathbf{ED}$ to $\{\langle t_1, t_3, \dots, t_n\rangle : R(t_1, t_1, t_3 \dots, t_n)\} \in \mathbf{ED}$,
c. Jeśli $R \in \mathbf{ED}$ to $\{\langle t_1, \dots, t_n\rangle : R(t_1, \dots, t_{k+1}, t_k, \dots, t_n)\} \in \mathbf{ED}$,
d. Jeśli $R \in \mathbf{ED}$ to $\{\langle t_1, \dots, t_n\rangle : nonR(t_1, \dots, t_n)\} \in \mathbf{ED}$,
   Jeśli $R \in \mathbf{ED}$ i $S \in \mathbf{ED}$ to
   $\{\langle t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}\rangle :$
   $R(t_1, \dots, t_n)$ oraz $S(t_{n+1}, \dots, t_{n+k})\} \in \mathbf{ED}$,
e. Jeśli $R \in \mathbf{ED}$ i gdy dla dowolnych $y, t_2, \dots, t_n : S(y, t_2, \dots, t_n) \equiv \forall t_1(t_1 \angle y \to R(t_1, t_2, \dots, t_n))$ to $S \in \mathbf{ED}$.

Znak $\angle$ oznacza relację bycia podsłowem, $t_1 \angle y$ czytamy: słowo t_1 jest podsłowem słowa y.

Twierdzenie 10

Jeśli $\mathcal{T}$ jest niesprzeczną teorią zawierającą teorię konkatenacji, to dla każdej ogólnie odróżnialnej relacji $R \in \mathbf{GD}$ istnieje formuła α, która reprezentuje relację R w teorii $\mathcal{T}$. □

Po udowodnieniu, że pewne syntaktyczne pojęcia (np. zbiór formuł, zbiór zmiennych, ciąg formuł, należenie formuły do danego ciągu, etc.) odnoszące się do teorii $\mathcal{T}$ są relacjami ogólnie odróżnialnymi, autor przeprowadza przekątniowy dowód nierozstrzygalności teorii $\mathcal{T}$.

Twierdzenie 11

Jeśli $\mathcal{T}$ jest teorią niesprzeczną i zawiera teorię konkatenacji, to jest $\mathcal{T}$ teorią *nierozstrzygalną*. □

Wynik ten ma oczywiste walory dydaktyczne – jest łatwiej dostępny czytelnikom, którzy np. nie słyszeli o chińskim twierdzeniu o resztach. Co ważniejsze, wynik ten został uzyskany przy słabszych założeniach. Teoria konkatenacji tekstów jest słabsza od arytmetyki liczb naturalnych z dodawaniem i mnożeniem. Można co prawda w tej teorii zdefiniować liczby naturalne i odpowiednik operacji dodawania, można też zdefiniować trójargumentową relację $x = y * z$, ale nie wydaje się by można było zdefiniować operację mnożenia liczb naturalnych.

Tablica 3. Ogólna odróżnialność GD

Warunki początkowe: te same jak w definicji elementarnej odróżnialności.

Definicja indukcyjna: klasa **GD** jest domknięta ze względu na operacje logiczne a.–e. z definicji elementarnej odróżnialności, a także ze względu na *operację dualnej kwantyfikacji*:
Pewna relacja R jest *ogólnie odróżnialna*, $R \in \mathbf{GD}$, gdy istnieją dwie relacje T i S takie, że $S, T \in \mathbf{GD}$ i gdy dla dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n$ mają miejsce następujące dwa fakty:

$$R(t_1, \ldots, t_n) \text{ wttw gdy istnieje } t_{n+1} \text{ takie. że } S(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1})$$

$$R(t_1, \ldots, t_n) \text{ wttw gdy dla każdego } t_{n+1} \quad T(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1})$$

Zwróćmy też, uwagę na to, że teoria konkatenacji tekstów obywa się bez schematu indukcji.

6. Najnowsze pasje Andrzeja Grzegorczyka

Znaleźć takie sformułowanie podstaw logiki, które jest wolne od paradoksów formalnej implikacji. Jeden ze znanych paradoksów stwierdza: *spośród trzech dowolnych zdań, dwa zdania są równoważne*; rzeczywiście następująca formuła $(p \equiv q) \vee (p \equiv r) \vee (q \equiv r)$ jest tautologią. Ten i inne paradoksy wynikają z dwuwartościowości przyjetej przez nas semantyki.

Andrzej Grzegorczyk proponuje by na nowo scharakteryzować implikację i równoważność, a dokładniej nową, inną implikację i inną relację równego znaczenia $\cong$. Powiada on: *naszym celem jest opisanie relacji równego znaczenia przez przyjęcie odpowiednio dobranych aksjomatów.*

Grzegorczyk zaproponował układ kilkunastu aksjomatów. Jego współpracownicy zbierają się i dyskutują z nim dobór aksjomatów, ich niesprzeczność, pełność i rozstrzygalność nowej teorii. Wyniki powinny zostać niedługo opublikowane.

7. Statystyki

Trudno oszacować jak często prace Grzegorczyka były cytowane w pracach informatycznych. Wyszukiwarka Google Scholar na pytanie "*Grzegorczyk hierarchy*" znajduje ponad 1000 odpowiedzi. Jeśli odrzucimy pozycje mniej istotne to i tak pozostaje ponad 400 cytowań, rozszerzeń, zastosowań i prezentacji prac Andrzeja Grzegorczyka.

Podziękowania. Andrzej Skowron, Paweł Urzyczyn, Marian Srebrny, Grażyna Mirkowska, Damian Niwiński, Mirosław Kutyłowski, Konrad Zdanowski i Jurek Tomasik zechcą przyjąć podziękowania za ich sugestie i komentarze. Za wszystkie błędy i usterki odpowiada autor, który ma nadzieję, że bogata twórczość profesora Andrzeja Grzegorczyka doczeka się głębszych niż niniejsze opracowań.

Nasz nauczyciel wciąż pracuje, zobacz rozdział 6.

Wielu nowych wyników życzę Panu, Panie Profesorze.

Bibliography

[Axt, 1963] P. Axt. Enumeration and the grzegorczyk hierarchy. *Z. Math. Logik Grundlagen Math*, 9:53–65, 1963.

[Beltyukov, 1982] Beltyukov, A.: A computer description and a hierarchy of initial Grzegorczyk classes, *Journal of Soviet Mathematics*, **20**, 1982, 2280–2289, Translation from *Zap. Nauk. Sem. Lening. Otd. Mat. Inst., V. A. Steklova AN SSSR*, **88**, 1979, 30–46.

[Bonner and Mecca, 2000] A. J. Bonner and G. Mecca. Querying sequence databases with transducers. *Acta Informatica*, 36:511–544, 2000.

[Bournez and Hainry, 2004] O. Bournez and E. Hainry. An analog characterization of elementarily computable functions over the real numbers. In J. Diaz, J. Karhumaki, A. Lepistö, and D. Sannell, editors, *ICALP 2004: International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, volume 3142 of *LNCS*, pages 116–127, 2004.

[Brainerd and Landweber, 1974] W. Brainerd and L. Landweber. *Theory of Computation.* J. Wiley, New York, NY, USA, 1974.

[Breidbart, 1979] S. Breidbart. APL and the Grzegorczyk hierarchy. In *Proceedings of the International Conference on APL*, pages 271–273, 1979.

[Campagnolo *et al.*, 2002] M. Campagnolo, C. Moore, and J. Costa. An analog characterization of the Grzegorczyk hierarchy. *Journal of Complexity*, 18:977–1000, 2002.

[Cichon and Wainer, 1983] E. A. Cichon and S. S. Wainer. The slow-growing and the Grzegorczyk hierarchies. *The Journal of Symbolic Logic*, 48(2):399–408, 1983.

[Cohn *et al.*, 1997] A. G. Cohn, B. Bennett, J. Gooday, and N. M. Gotts. Qualitative spatial representation and reasoning with the region connection calculus. *GeoInformatica*, 1:275–317, 1997.

[Cook, 1983] S. A. Cook. An overview of computational complexity. *Commun. ACM*, 26(6):400–408, 1983.

[Cornaros, 1995] C. Cornaros. On Grzegorczyk induction. *Annals of Pure and Applied Logic*, 74(1):1–21, 1995.

[Downey and Hirschfeldt, 2008] R. Downey and D. Hirschfeldt. *Algorithmic Randomness and Complexity.* Springer, Berlin, 2008.

[Gabbay, 1974] D. M. Gabbay. On 2nd order intuitionistic propositional calculus with full comprehension. *Annals of Mathematical Logic*, 16:177–186, 1974.

[Gakwaya, 1997] J.-S. Gakwaya. Extended Grzegorczyk hierarchy in the bss model of computability. In Shub Cucker, editor, *Foundations of Computational Mathematics*, pages 127–151. Springer, Berlin, 1997.

[Görnemann, 1971] S. Görnemann. A logic stronger than intuitionism. *Journal of Symbolic Logic*, 36(2):249–261, 1971.

[Grozea, 2004] C. Grozea. NP predicates computable in the weakest level of the Grzegorczyck hierarchy. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 9(2–3):269–279, September 2004.

[Grzegorczyk, 1951] A. Grzegorczyk. Undecidability of some topological theories. *Fundamenta Mathematicae*, 38:137–152, 1951.

[Grzegorczyk, 1953] Grzegorczyk. Some classes of recursive functions. *Rozprawy matematyczne*, 4:3–45, 1953.

[Grzegorczyk, 1957] A. Grzegorczyk. On the definitions of computable real continuous functions. *Fund. Math.*, 44:61–71, 1957.

[Grzegorczyk, 1961] A. Grzegorczyk. *Zarys logiki matematycznej.* PWN, Warszawa, 1961. 506 pp.

[Grzegorczyk, 1964a] A. Grzegorczyk. A philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic. *Indagationes Mathematicae*, 26:596–601, 1964.

[Grzegorczyk, 1964b] A. Grzegorczyk. Recursive objects in all finite types. *Fundamenta Mathematicae*, 45:73–93, 1964.

[Grzegorczyk, 2005] A. Grzegorczyk. Undecidability without arithmetization. *Studia Logica*, 79(2):163–230, 2005.

[Hartmanis and Hopcroft, 1971] J. Hartmanis and J. E. Hopcroft. An overview of the theory of computational complexity. *J. ACM*, 18(3):444–475, 1971.

[J. and Niggl, 2000] Bellantoni. S. J. and K. H. Niggl. Ranking primitive recursions: the low Grzegorczyk classes revisited. *SIAM Journal on Computing*, 29:401–415, 2000.

[Kelly, 2012] K. T. Kelly. Computability and hierarchies. 2012.

[Krajewski and Woleński, 2008] S. Krajewski and J. Woleński. Andrzej Grzegorczyk: Logic and philosophy. *Fundamenta Informaticae*, 81(1–3):1–17, May 2008. Special Issue: Topics in Logic, Philosophy and Foundations of Mathematics and Computer Sciences. In Recognition of Professor Andrzej Grzegorczyk.

[Kristiansen and Barra, 2005] L. Kristiansen and M. Barra. The small Grzegorczyk classes and the typed lambda-calculus. In S. B. Cooper, B. Löwe, and L. Torenvliet, editors, *CiE: New Computational Paradigms*, pages 252–262. Springer, 2005.

[Kutyłowski and Loryś, 1987] M. Kutyłowski and K. Loryś. A note about $e^0_* = e^2_*$? problem. *Zt. math. Logik und Grundlag. Math.*, 33:115–121, 1987.

[Kutyłowski, 1987a] M. Kutyłowski. A generalized Grzegorczyk hierarchy and low complexity classes. *Information and Computation*, 72(2):133–149, 1987.

[Kutyłowski, 1987b] M. Kutyłowski. Small Grzegorczyk classes. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2):193, 1987.

[M., 1981] Gabbay D. M. *Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistic Logic*, volume 148 of *Synthese Library*. D. Reidel, Dordrecht, 1981.

[Maksimova, 2007] L. Maksimova. On modal Grzegorczyk logic. *Annales Societatis Mathematicae Polonae. Series 4: Fundamenta Informaticae*, 81(1–3):203–210, 2007.

[Mehlhorn, 1974] K. Mehlhorn. Polynomial and abstract subrecursive classes. In *Proceedings of the sixth annual ACM symposium on Theory of computing. Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Seattle, WA, 1974. ACM Press. see also J. Comp. Syst Sci. **12**, 1976, 147–178.

[Meyer and Ritchie, 1967] A. R. Meyer and D. M. Ritchie. The complexity of loop programs. In *Proceedings of the 1967 22nd national ACM conference*, pages 465–469, New York, NY, USA, 1967. ACM Press.

[Meyer, 1965] A. R. Meyer. Depth of nesting and the Grzegorczyk hierarchy. *Notices Amer. Math. Soc.*, 13:622–656, 1965.

[Muchnick, 1976] S. Muchnick. The vectorized Grzegorczyk hierarchy. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 22:441–480, 1976.

[Mycka and Costa, 2006] J. Mycka and J. Costa. Undecidability over continuous time. *Logic Journal of IGPL*, 14(5):469, 2006.

[Ornaghi *et al.*, 2006] M. Ornaghi, M. Benini, M. Ferrari, C. Fiorentini, and A. Momigliano. A constructive object oriented modeling language for information systems. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 153(1):55–75, 2006.

[Rauszer and Sabalski, 1975] C. Rauszer and B. Sabalski. Notes on Rasiowa-Sikorski lemma. *Studia Logica*, 34(3):265–268, 1975.

[Ritchie, 1963] R. W. Ritchie. Classes of predictably computable functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106:139–179, 1963.

[Rogers Jr, 1987] H. Rogers Jr. *Theory of recursive functions and effective computability.* MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1987.

[Rose, 1984] H. Rose. *Subrecursion, Functions and Hierarchies.* School of Mathematics, University of Bristol Edition. Clarendon Press, Oxford, 1984.

[Salwicki, 2008] A. Salwicki. Andrzej Grzegorczyk's contribution to computer science. *Fundamenta Informaticae*, 81:315–320, 2008.

[Schwichtenberg, 1997] H. Schwichtenberg. Classifying recursive functions. In *Handbook of Recursion Theory.* North Holland Elsevier, Amsterdam, 1997.

[Shelah, 1988] S. Shelah. Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers. *Journal of the American Mathematical Society*, 1(3):683–697, 1988.

[Wagner and Wechsung, 2001] K. Wagner and G. Wechsung. *Computational Complexity.* Springer, 2001.

[Wainer, 1972] S. Wainer. Ordinal recursion, and a refinement of the extended Grzegorczyk hierarchy. *The Journal of Symbolic Logic*, 37(2):281–292, June 1972.

[Weiermann, 1995] A. Weiermann. Rewriting theory for the hydra battle and the extended grzegorczyk hierarchy. Technical report, 1995.

[Wolter and Zakharyaschev, 2002] F. Wolter and M. Zakharyaschev. Qualitative spatio-temporal representation and reasoning: a computational perspective. In G. Lakemeyer and B. Nebel, editors, *Exploring Artificial Intelligence in the New Millenium*, pages 175–216. Morgan Kaufmann, 2002.

Andrzej Salwicki
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy UKSW Warszawa
e-mail: `salwicki@mimuw.edu.pl`